



TITLE:

# グラフ演算による最適な故障診断 可能システムの構成 (計算理論とア ルゴリズムの新展開)

AUTHOR(S):

荒木, 徹; 柴田, 幸夫

---

CITATION:

荒木, 徹 ...[et al]. グラフ演算による最適な故障診断可能システムの構成  
(計算理論とアルゴリズムの新展開). 数理解析研究所講究録 2001, 1205:  
136-141

ISSUE DATE:

2001-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41014>

RIGHT:

# グラフ演算による最適な故障診断可能システムの構成

荒木 徹  
Toru Araki

柴田 幸夫  
Yukio Shibata

群馬大学工学部情報工学科  
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Gunma University

## アブストラクト

ネットワークシステム上の故障を自動的に見つけるためのモデルとして, Preparata らによる PMC モデルが知られている. また, ネットワークのトポロジを与えるための方法の一つとして, グラフの演算が広く用いられている. 本論文では, 故障を局所的な情報から診断できる特徴を持つ highly structured システムの理論を用いて, グラフの直積, Kronecker 積, ラインダイグラフ演算による最適なシステムの構成について述べる. また, その結果を用いていくつかの最適なネットワークを示す.

**Key Words:** 故障診断可能システム, PMC モデル, 同時  $t$  診断可能システム, highly structured システム, グラフ演算.

## 1 はじめに

大規模コンピュータネットワークやマルチプロセッサシステムのグラフモデルとして, ハイパーキューブ, de Bruijn グラフ, Kautz グラフ, バタフライグラフ等が注目されている [4, 9]. それら相互結合網に関する研究の進展に伴い, ネットワークの信頼性, 安全性を保持するための耐故障性の研究が重要となっている. 大規模システムにおいて, その中のすべてのコンピュータユニット (プロセッサ) の状態を検査するホストを設置することは, 実用上困難である. そのため, システム内の各ユニットが互いの状態を検査しあい, それらの検査結果の集合 (これをシンδροームと呼ぶ) から故障ユニットを特定する方法が有効となる. こうした自己診断可能なシステムの研究の発端は, Preparata ら [10] による研究にある. Preparata らは, システム内に発生する故障ユニットの数に上限を仮定し, システムのユニットと検査をそれぞれグラフの頂点と有向辺に対応させることにより, 故障診断の問題を定式化した. このグラフモデルは現在 PMC モデルと呼ばれている. この研究

の中で, 同時  $t$  診断可能システム, 逐次  $t$  診断可能システムの二つの基本モデルが提案された. システムが同時  $t$  診断可能であるためのグラフ的な特徴付けは Hakimi and Amin [5] によって示された. 具体的なネットワークに関する研究としては, これまでにハイパーキューブ [2, 14] や de Bruijn グラフ, Kautz グラフ [12, 8] に関する結果が報告されている.

香田 [6] は, 同時  $t$  診断可能システムの解析法として highly structured システムを提案した. このシステムは, 局所的な検査結果から非常に単純な方法で故障ユニットを識別できる特徴を持っている.

本論文では, ハイパーキューブ, de Bruijn グラフ等のネットワークがグラフの演算を用いて構成されていることに着目し, グラフの積やラインダイグラフ演算で構成されるグラフと前述の highly structured システムとの関連について論じる. さらに, 得られた結果を用いていくつかの最適なネットワークを示す. 我々は [1] において, グラフの直積で構成できるネットワークの故障診断について考察を行った. 本論文の結果は [1] で与えた結果よりも, より強い結果を与えるものである.

## 2 グラフの演算

本論文で扱うグラフは全てダイグラフ (有向グラフ) とする. ダイグラフ  $G$  の頂点集合, 辺集合をそれぞれ  $V(G)$ ,  $E(G)$ , 頂点  $u$  から  $v$  への有向辺を  $uv$  のように表す. 特に  $u$  から  $u$  への有向辺  $uu$  を自己ループという.  $u$  へ向かう有向辺の数を  $u$  の入次数といい  $d_G^-u$  で表す.  $G$  における最小の入次数を  $\delta(G)$  で表す.

グラフ  $G, H$  の直積  $G \times H$  とは,  $V(G) \times V(H)$  を頂点集合として持ち, 頂点  $(u_1, v_1)$  から  $(u_2, v_2)$  への有向辺が存在するのは,  $u_1 = u_2$  かつ  $v_1 v_2 \in E(H)$  であるか, または  $v_1 = v_2$  かつ  $u_1 u_2 \in E(G)$  であるグラ

フである。グラフ  $G, H$  の **Kronecker 積**  $G \otimes H$  とは、 $V(G) \times V(H)$  を頂点集合として持ち、頂点  $(u_1, v_1)$  から  $(u_2, v_2)$  へ有向辺が存在するのは  $u_1 u_2 \in E(G)$  かつ  $v_1 v_2 \in E(H)$  であるグラフである。

直積は最も良く知られたグラフの演算の一つである。ハイパーキューブ、メッシュ、トーラスは直積で定義されるグラフの代表的なものである。Kronecker 積はこれまで理論的な研究が広く行われてきた積であり、特にグラフの分解や埋め込みに関連する問題で良く研究されている。また後述するライングラフ演算と関連が深い。

ダイグラフ  $G$  の **ラインダイグラフ**  $L(G)$  とは、 $E(G)$  を頂点集合として持ち、頂点  $uv$  から  $xy$  へ有向辺が存在するのは  $v = x$  であるグラフである。ラインダイグラフ演算で定義されるグラフの代表的なものとして、de Bruijn グラフ、Kautz グラフが知られている [4]。

### 3 故障診断可能システムと highly structured システム

Preparata ら [10] が提案した PMC モデルは、故障診断可能システムをダイグラフを用いてモデル化する。システム内の各ユニットはグラフの頂点に対応し、ユニット  $u$  がユニット  $v$  を検査するとき、頂点  $u$  から  $v$  へ有向辺が存在する。ユニットの検査結果は有向辺の重み  $w(u, v)$  で表し、 $u$  が  $v$  を検査した結果、正常と判断したならば  $w(u, v) = 0$ 、故障と判断したら  $w(u, v) = 1$  とする。ただし、その検査結果はユニット  $u$  が正常であるときのみ信頼できると仮定する。システム内の各ユニットの検査結果の集合をシンドロームという。シンドロームを解析することにより故障ユニットを特定することが故障診断の目的である。故障ユニット数が  $t$  を超えないという仮定のもとで、任意のシンドロームから全ての故障ユニットを識別可能であるとき、システムは **同時  $t$  診断可能** であるという。

PMC モデルでは、各ユニットが自分自身を検査することはないため、ダイグラフにおける自己ループは除いて考える。頂点  $u$  を検査する頂点の数を  $\gamma_G^- u$  で表す。明らかに  $u$  が自己ループを持つなら  $\gamma_G^- u = d_G^- u - 1$ 、自己ループを持たないなら  $\gamma_G^- u = d_G^- u$  である。 $G$  の全ての頂点における  $\gamma_G^- u$  の最小値を  $\gamma^-(G)$  で表す。

Hakimi and Amin[5] は、システム  $G$  が同時  $t$  診断可能であるための必要十分条件を示した。その中

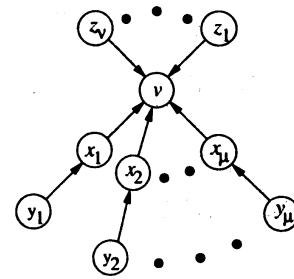


図 1: 部分グラフ  $H(v; \mu, \nu)$ .

で、 $n$  個のユニットを持つシステムが同時  $t$  診断可能であるならば、

$$\begin{cases} (H1) & n \geq 2t + 1, \\ (H2) & \gamma^-(G) \geq t \end{cases}$$

となることが示されている。与えられたシステムに対し、それが同時  $t$  診断可能となる  $t$  の最大値を、そのシステムの **故障診断度** という。すなわち、故障診断度とは、システムが正しく故障を識別することを保証する故障数の上限である。よって、システムの信頼性を高めるためには、故障診断度がなるべく大きくなるネットワークを構成することが必要になる。条件 (H2) は、故障診断度がグラフの最小の次数を超えることができないことを示している。

香田 [6] は、Preparata らの理論に基づき、より効率的な同時  $t$  診断を可能にする highly structured システムを次のように提案した。

**定義 3.1** グラフ  $G$  の各頂点  $v$  に対して、図 1 で表される部分グラフ  $H(v; \mu, \nu)$  が構成できるとき、グラフ  $G$  は **highly structured システム** であるという。 $H(v; \mu, \nu)$  の形式的な定義は以下のように表される：

$$\begin{aligned} V(H(v; \mu, \nu)) &= \{v, x_1, \dots, x_\mu, y_1, \dots, y_\nu, \\ &\quad z_1, \dots, z_\nu\} \\ E(H(v; \mu, \nu)) &= \{y_i x_i, x_i v \mid 1 \leq i \leq \mu\} \cup \\ &\quad \{z_j v \mid 1 \leq j \leq \nu\} \end{aligned}$$

頂点  $v$  を  $H(v; \mu, \nu)$  の **カーネル** と呼ぶ。

highly structured システムに関して、次のことが証明されている。

**定理 3.2 (香田 [6])** システム  $G$  が、 $\mu + \lfloor \nu/2 \rfloor \geq t$  を満たす  $\mu, \nu$  に対して highly structured システムならば、 $G$  は同時  $t$  診断可能である。

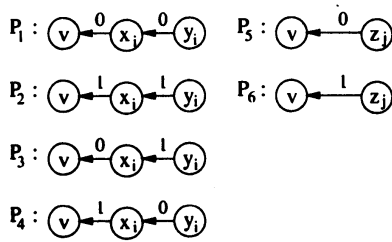


図 2:  $H(v; \mu, \nu)$  の 6 種の検査結果のパターン  $P_k$ .

**定理 3.3 (香田 [6])** 定理 3.2 が成立するシステム  $G$  の任意の頂点  $v$  において

$$p_1 + \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor - (p_4 + p_6) \geq 0$$

が成り立つとき、かつそのときに限り  $v$  は正常である。ここで  $p_k$  は図 2 に示すような部分システム  $H(v; \mu, \nu)$  の検査結果のパターン  $P_k$  の数とする。

この解析法により、 $n$  個のユニットを持つ highly structured システムでは、各ユニット  $v$  に対する部分システム  $H(v; \mu, \nu)$  が与えられていれば、任意のシンドロームに対して  $O(nt)$  で故障を識別することが可能である [7]。

## 4 グラフの演算と highly structured システム

本節では、グラフ演算を用いて構成されたグラフ上に、定義 3.1 の部分グラフを構成することについて述べる。ここで扱うグラフは  $\gamma^-(G) \geq 1$  を満たすものとする。このとき、どのようなグラフ  $G$  とその任意の頂点  $v$  に対しても、ある  $\mu, \nu$  について部分グラフ  $H(v; \mu, \nu)$  を構成できる (例えば  $\mu = 0, \nu = \gamma^-(G)$ )。しかしながら、故障診断度を引き上げるために、 $\mu$  の値を出来る限り大きく取ることに興味がある (定理 3.2)。そこで以下の関数を定義する。グラフ  $G$  の各頂点  $v$  に対し、 $\mu_{Gv}$  を  $v$  以外の頂点を共有しないような  $v$  へ向かう長さ 2 のパスの最大数と定義する。さらに  $\nu_{Gv}$  を、 $v$  へ向かう長さ 2 のパスが  $\mu_{Gv}$  本あるときの、それらと  $v$  以外の頂点を共有しない、 $v$  へ向かう長さ 1 のパスの最大数とする。全ての頂点  $v$  において  $\mu_{Gv} = \gamma_{Gv}^-$  が成立するとき、そのシステムは局所的に最適であると呼ぶ。3 節の条件 (H2) は、同時  $t$  診断可能システムでは、全てのユニット  $v$  に対して  $v$  を検査するユニットが少なくとも  $t$  個なければならないことを示している。検査数が  $nt$  である

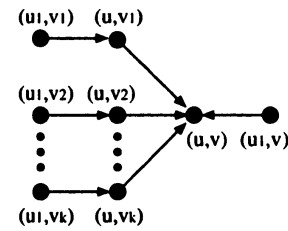


図 3: Case 1.  $G \times H$  における  $(u, v)$  をカーネルとする部分システム  $H((u, v); k, 1)$ .

システムを最適システムと呼ぶ。局所的に最適なシステムが、任意の頂点  $v$  で  $\gamma_{Gv}^- v = t$  を満足すれば、それは最適システムである。

### 4.1 直積と highly structured システム

ダイグラフ  $G, H$  と  $u \in V(G)$ ,  $v \in V(H)$  が与えられたとき、 $G$  と  $H$  の直積  $G \times H$  の頂点  $(u, v)$  をカーネルとする部分グラフを構成する。ここでは  $G, H$  に自己ループは存在しないと仮定する。すなわち任意の頂点  $v$  で  $d_{Gv}^- = \gamma_{Gv}^-$  である。以下の 3 通りの場合を考える。

1.  $\mu_{Gu} = \mu_{Hv} = 0$ ,  $\nu_{Gu} = 1$ ,  $\nu_{Hv} = k \geq 1$  の場合。

このとき  $d_{Gu}^- = 1$ ,  $d_{Hv}^- = k$  である。  $\Gamma_G^- u = \{u_1\}$ ,  $\Gamma_H^- v = \{v_1, \dots, v_k\}$  とする。関数  $\mu$  の定義から  $\Gamma_{G \times H}^- (u, v) = \{u\}$  である。これより、 $G \times H$  上に図 3 の部分システム  $H((u, v); k, 1)$  を構成できる。図 3 より

$$\begin{cases} \mu_{(G \times H)}(u, v) &= d_{(G \times H)}^- (u, v) - 1 \\ \nu_{(G \times H)}(u, v) &= 1. \end{cases}$$

2.  $\mu_{Gu} = \mu_{Hv} = 0$ ,  $\nu_{Gu} \geq 2$ ,  $\nu_{Hv} \geq 2$  の場合。

$d_{Gu}^- = k$ ,  $d_{Hv}^- = p$  とし、 $\Gamma_G^{-1} u = \{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $\Gamma_H^{-1} v = \{v_1, \dots, v_p\}$  とする。これより  $G \times H$  において  $(u, v)$  をカーネルとする部分グラフ  $H((u, v); k + p, 0)$  を図 4 のように構成できる。これより  $\mu_{(G \times H)}(u, v) = k + p = d_{(G \times H)}^- (u, v)$ 。

3.  $\mu_{Gu} \geq 1$  の場合。

$G$  上で  $u$  へ向かう長さ 2 のパスのうち一つを選び、それを  $(y \rightarrow x \rightarrow u)$  とする。また

$$\begin{cases} d_{Gu}^- = k & \Gamma_G^{-1} u = \{x, u_1, \dots, u_{k-1}\} \\ d_{Hv}^- = p & \Gamma_H^{-1} v = \{v_1, \dots, v_p\} \end{cases}$$

とする。 $G \times H$  において  $(u, v)$  をカーネルとする部

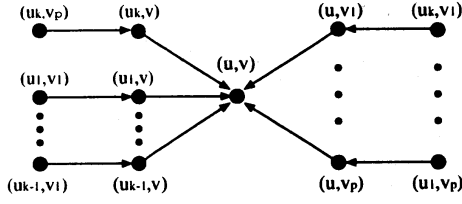


図 4: Case 2.  $G \times H$  における  $(u, v)$  をカーネルとする部分システム  $H((u, v); k + p, 0)$ .

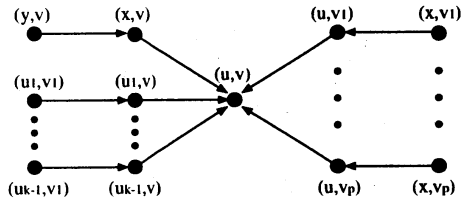


図 5: Case 3.  $G \times H$  における  $(u, v)$  をカーネルとする部分システム  $H((u, v); k + p, 0)$ .

分グラフ  $H((u, v); k + p, 0)$  を図 5 のように構成できる. これより  $\mu_{(G \times H)}(u, v) = k + p = d_{(G \times H)}^-(u, v)$ .

**定理 4.1**  $G, H$  を  $\delta(G) \geq 1, \delta(H) \geq 1$  を満たす自己ループを持たないダイグラフとする. 任意の  $u \in V(G), v \in V(H)$  に対し

- (1)  $\mu_{Gu} = \mu_{Hv} = 0$  かつ  $\min\{\nu_{Gu}, \nu_{Hv}\} = 1$  ならば,  $\mu_{(G \times H)}(u, v) = d_{(G \times H)}^-(u, v) - 1, \nu_{(G \times H)}(u, v) = 1$ .
- (2)  $\mu_{Gu} = \mu_{Hv} = 0$  かつ  $\min\{\nu_{Gu}, \nu_{Hv}\} \geq 2$ , または  $\max\{\mu_{Gu}, \mu_{Hv}\} \geq 1$  ならば  $\mu_{(G \times H)}(u, v) = d_{(G \times H)}^-(u, v)$ .

**系 4.2**  $G, H$  を  $\delta(G) \geq 1, \delta(H) \geq 1$  を満たす自己ループを持たないダイグラフとする. 任意の  $u \in V(G), v \in V(H)$  に対し  $\mu_{Gu} = \mu_{Hv} = 0$  かつ  $\min\{\nu_{Gu}, \nu_{Hv}\} \geq 2$  または  $\max\{\mu_{Gu}, \mu_{Hv}\} \geq 1$  ならば,  $G \times H$  は局所的に最適なシステムである.

## 4.2 Kronecker 積と highly structured システム

4.1 節と同様に, Kronecker 積  $G \otimes H$  における部分グラフの構成について述べる. ここで考えるダイグラフは自己ループを持つものも含めて考える. グラフ  $G$  の頂点  $u$  が自己ループを持つなら  $\mu_{Gu} + \nu_{Gu} = d_{Gu}^- - 1$  であり, 自己ループを持たないなら  $\mu_{Gu} + \nu_{Gu} = d_{Gu}^-$  である.

$\mu_{Gu} \geq 1$  かつ  $\mu_{Hv} \geq 1$  とする.  $\mu_{Gu} = k$  かつ  $G$  上で  $u$  へ向かう長さ 2 の  $k$  本のパスを  $(y_i \rightarrow x_i \rightarrow u)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) とし,  $\mu_{Hv} = p$  かつ  $H$  上で  $v$  へ向かう長さ 2 の  $p$  本のパスを  $(y'_j \rightarrow x'_j \rightarrow v)$  ( $j = 1, \dots, p$ ) とする. このとき, 任意の  $i, j$  ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p$ ) に対して,  $G \otimes H$  上に長さ 2 のパス

$$(y_i, y'_j) \rightarrow (x_i, x'_j) \rightarrow (u, v) \quad (1)$$

が存在する.  $u$  が  $G$  上で自己ループを持つならば,

$$(u, y'_j) \rightarrow (u, x'_j) \rightarrow (u, v) \quad (2)$$

で表される  $p$  本のパスが存在する. 同様に  $v$  が  $H$  上で自己ループを持つなら,

$$(y_i, v) \rightarrow (x_i, v) \rightarrow (u, v) \quad (3)$$

という  $k$  本のパスが存在する.

$\ell_{Gu}$  を,  $u$  が  $G$  上で自己ループを持つとき 1, 持たないとき 0 となるような関数であるとする. (1), (2), (3) より,

$$\begin{aligned} \mu_{(G \otimes H)}(u, v) &= (\mu_{Gu})(\mu_{Hv}) + (\ell_{Gu})(\mu_{Hv}) + (\mu_{Gu})(\ell_{Hv}) \\ &= (\mu_{Gu} + \ell_{Gu})(\mu_{Hv} + \ell_{Hv}) - (\ell_{Gu})(\ell_{Hv}) \end{aligned}$$

を得る.

**定理 4.3**  $u \in V(G), v \in V(H)$  が,  $\mu_{Gu} = d_{Gu}^- - \ell_{Gu}, \mu_{Hv} = d_{Hv}^- - \ell_{Hv}$  を満たすとする. このとき,  $G \otimes H$  の頂点  $(u, v)$  に対して

$$\mu_{(G \otimes H)}(u, v) = d_{(G \otimes H)}^-(u, v) - \ell_{(G \otimes H)}(u, v).$$

**系 4.4**  $G, H$  が局所的に最適であるなら,  $G \otimes H$  もまた局所的に最適である.

## 4.3 ラインダイグラフ演算と highly structured システム

$G$  の頂点  $u$  において部分グラフ  $H(u; \mu, \nu)$  が構成されたとする.  $u$  から接続する有向辺  $e = uv$  に対し,  $L(G)$  において  $e$  をカーネルとする部分システムを構成することを考える.  $d_{L(G)}^-(uv) = d_{Gu}^-$  であり, また  $\mu_{L(G)}uv \geq \mu_{Gu}$  は明らかである.

$\mu_{Gu} = k$  とし,  $G$  において  $u$  へ向かう  $k$  本の長さ 2 のパスを  $(y_i \rightarrow x_i \rightarrow u)$ ,  $1 \leq i \leq k$  とする. また  $\nu_{Gu} = p$  とし,  $u$  へ向かう  $p$  本の長さ 1 のパスを  $(z_j \rightarrow u)$ ,  $1 \leq j \leq p$  とする.  $z_j$  は自分以外から隣接する頂点が少なくとも一つ存在するので, その中

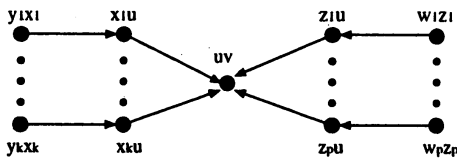


図 6:  $L(G)$  上の  $e = uv$  をカーネルとした部分システム  $H(uv; k + p, 0)$ .

の任意の一つを選び、それを  $w_j$  とする。このとき、 $L(G)$  において  $e = uv$  をカーネルとする部分システムを図 6 のように構成できる。

**定理 4.5** ダイグラフ  $G$  が  $\gamma^-(G) \geq 1$  を満たすなら、 $L(G)$  は局所的に最適なシステムである。

## 5 ネットワークへの適用

### 5.1 ハイパーキューブ, メッシュ, トーラス

$n$  次元ハイパーキューブ  $Q_n$ ,  $n$  次元メッシュ  $M_n(k_1, \dots, k_n)$ ,  $n$  次元トーラス  $T_n(p_1, \dots, p_n)$  は直積を用いてそれぞれ次のように定義される。 $K_2$ ,  $P_k$ ,  $C_p$  は、それぞれ無向グラフの 2 個の頂点を持つ完全グラフ、 $k$  個の頂点を持つパス、 $p$  個の頂点を持つサイクルにおいて、隣接する 2 点を互いに隣接する有向辺に置き換えたものである。

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_2, Q_n = Q_{n-1} \times K_2 \text{ for } n \geq 2 \\ M_n(k_1, k_2, \dots, k_n) &= P_{k_1} \times P_{k_2} \times \dots \times P_{k_n}, \\ T_n(p_1, p_2, \dots, p_n) &= C_{p_1} \times C_{p_2} \times \dots \times C_{p_n}. \end{aligned}$$

系 4.2 を用いることにより、これらのグラフについて以下が成り立つことがすぐにわかる。

#### 定理 5.1

- (1)  $Q_n$  は  $n \geq 3$  に対して同時  $n$  診断可能であり、最適な highly structured システムである。
- (2)  $M_n(k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_i \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq n$  は  $n \geq 3$  に対して同時  $n$  診断可能であり、局所的に最適な highly structured システムである。
- (3)  $T_n(p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_i \geq 3$ ,  $1 \leq i \leq n$  は  $n \geq 2$  に対して同時  $2n$  診断可能であり、最適な highly structured システムである。

### 5.2 de Bruijn グラフ, Kautz グラフ

de Bruijn グラフ  $B(d, D)$  と Kautz グラフ  $K(d, D)$  は、次のようにラインダイグラフ演算を用いて再起的に定義されるグラフである [4]。ここで、 $K_d^*$  は  $d$  個の頂点を持ち、各頂点が自分以外の全ての頂点へ有向辺を持つようなダイグラフであり、 $K_d^+$  はさらに各頂点に自己ループを加えたグラフである。

$$\begin{aligned} B(d, 1) &= K_d^+, & B(d, D) &= L(B(d, D-1)), \\ K(d, 1) &= K_{d+1}^*, & K(d, D) &= L(K(d, D-1)). \end{aligned}$$

定理 4.5 の結果から、de Bruijn グラフ, Kautz グラフについて以下が成り立つ。この結果は、香田ら [8] によって得られた結果と一致するものである。

**定理 5.2** (1)  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$  に対し、de Bruijn グラフ  $B(d, D)$  は同時  $(d-1)$  診断可能であり、局所的に最適な highly structured システムである。  
(2)  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$  に対し、Kautz グラフ  $K(d, D)$  は同時  $d$  診断可能な最適 highly structured システムである。

### 5.3 Extended de Bruijn グラフ, Extended Kautz グラフ

de Bruijn グラフ, Kautz グラフはその一般化がいくつか提案されている。extended de Bruijn グラフは Shibata and Gonda[11] によって提案されたグラフである。extended de Bruijn グラフ  $E_B(d; D_0, \dots, D_{k-1})$  は次のように Kronecker 積を用いて定義される。

$$\begin{aligned} E_B(d; D_0, D_1, \dots, D_{k-1}) \\ = B(d, D_0) \otimes B(d, D_1) \otimes \dots \otimes B(d, D_{k-1}). \end{aligned}$$

extended Kautz グラフ  $E_K(d; D_0, \dots, D_{k-1})$  も、同様に次のように定義される。

$$\begin{aligned} E_K(d; D_0, D_1, \dots, D_{k-1}) \\ = K(d, D_0) \otimes K(d, D_1) \otimes \dots \otimes K(d, D_{k-1}). \end{aligned}$$

ラインダイグラフ演算と Kronecker 積の間には演算の交換法則が成り立つことが知られている [13]。すなわち、任意のグラフ  $G, H$  に対して  $L(G \otimes H) = L(G) \otimes L(H)$  が成り立つ。したがって、extended de Bruijn グラフ, extended Kautz グラフに関して以下が成り立つ。

$$E_B(d; D_0 + 1, D_1 + 1, \dots, D_{k-1} + 1)$$

$$\begin{aligned}
&= L(E_B(d; D_0, D_1, \dots, D_{k-1})), \\
E_K(d; D_0 + 1, D_1 + 1, \dots, D_{k-1} + 1) \\
&= L(E_K(d; D_0, D_1, \dots, D_{k-1})).
\end{aligned}$$

この性質を用いることにより、定理 5.2 と系 4.4 から次が成り立つ。

### 定理 5.3

(1)  $E_B(d; D_0, \dots, D_{k-1})$  ( $D_i \geq 2, 0 \leq i \leq k-1$ ) は同時  $d^k - 1$  診断可能であり、局所的に最適な highly structured システムである。

(2)  $E_K(d; D_0, D_1, \dots, D_{k-1})$  ( $D_i \geq 2, 0 \leq i \leq k-1$ ) は同時  $d^k$  診断可能である最適な highly structured システムである。

## 5.4 バタフライ

$k$  進  $r$  次元バタフライ  $b(k, r)$  は、頂点が正整数とベクトルの組  $\langle \ell; x \rangle$ ,  $0 \leq \ell < r$ ,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ ,  $0 \leq x_i < k$  でラベル付けされ、頂点  $\langle \ell; x \rangle$  から  $\langle \ell + 1; x' \rangle \rightarrow x$  と  $x'$  が  $\ell$  ビット目だけが異なるとき有向辺が存在する。

バタフライは de Bruijn グラフとサイクルの Kronecker 積で表すことができる [3]。すなわち、 $C_r$  を  $r$  個の頂点を持つ有向サイクルとすると  $b(k, r) = B(k, r) \otimes C_r$  が成り立つ。したがって定理 4.4 より、次が成り立つことがすぐにわかる。

**定理 5.4**  $k \geq 2$ ,  $r \geq 3$  に対し、バタフライ  $b(k, r)$  は同時  $k$  診断可能な最適 highly structured システムである。

## 6 まとめ

本研究では、多くのネットワークがグラフの演算を用いて構成されている事実に着目し、グラフの演算と故障診断可能システム、特に highly structured システムの関係について考察した。その結果、直積、ラインダイグラフ演算は局所的に最適なネットワークを構成することを示すことができた。また Kronecker 積は最適性を保存する演算であることが証明できた。これらの結果を利用することにより、いくつかの代表的なネットワークが最適、もしくは最適に近い highly structured システムであることを示すことができた。現在も新しい構造を持ったネットワークが次々と提案されている。グラフの演算に代表される、ネットワークの構成法と故障診断の関連を研究することは、

広いネットワークのクラスに適用可能な手法として非常に有用であると考えられる。

## 参考文献

- [1] T. Araki and Y. Shibata, "Diagnosability of networks represented by the cartesian product," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E83-A, no.3, pp.465-470, March 2000.
- [2] J.R. Armstrong and F.G. Gray, "Fault diagnosis in a boolean  $n$  cube array of microprocessors," IEEE Trans. Comput., vol.C-30, no.8, pp.587-596, 1981.
- [3] J.-C. Bermond, E. Darrot, O.Delmas and S. Perenners, "Hamilton circuits in the directed wrapped Butterfly networks," Discrete Applied Math., 84, pp.21-42, 1998.
- [4] J.-C. Bermond and C. Peyrat, "de Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube?," in Hypercube and Distributed Computers, F. André and J.P. Verjus(eds.) Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), pp.279-293, 1989.
- [5] S.L. Hakimi and A.T. Amin, "Characterization of connection assignment of diagnosable systems," IEEE Trans. Comput., vol.C-23, no.1, pp.86-88, Jan. 1974.
- [6] 香田, "t 重故障同時診断可能システム," 信学論 (D), vol.J61-D, no.9, pp.680-687, 1978.
- [7] 香田, 三岡, " $O(|E|)$  で解析可能な  $t$  重故障同時診断可能システムの最適構成," 信学論 (D), vol.J69-D, no.11, pp.1547-1555, Nov. 1986.
- [8] 香田, 吉田, 朱雀, "de Bruijn ネットワーク, 変形 de Bruijn ネットワークおよび Kautz ネットワークにおける分散的自己診断可能システム," 信学論 (A), vol.J83-A, no.5, pp.524-535, May 2000.
- [9] F.T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes," Morgan Kaufmann, 1992.
- [10] F.P. Preparata, G. Metze and R.T. Chien, "On the connection assignment problem of diagnosable systems," IEEE Trans. Electron. Comput., vol.EC-16, no.6, pp.848-854, Dec. 1967.
- [11] Y. Shibata and Y. Gonda, "Extension of de Bruijn graph and Kautz graph," Computers and Mathematics with Applications, 30, pp.51-61, 1995.
- [12] 柴田, 飯島, "de Bruijn network および Kautz network 上の故障診断システムの構成と診断アルゴリズム," 信学論 (D), vol.J75-D-I, no.12, pp.1144-1153, 1992.
- [13] Y. Shibata, T. Hasunuma and S. Fukuda, "Isomorphic factorization of de Bruijn digraphs," Discrete Mathematics, 218, pp.199-208, 2000.
- [14] 柴田, 安田, "ハイパーキューブネットワーク上の故障診断システムの構成と診断アルゴリズム," 信学論 (D), vol.J74-D-I, no.11, pp.784-787, Nov. 1991.